

广义 p -Laplace 边值问题正解的存在性与多解性*

白定勇, 左敏贤

(广州大学数学与信息科学学院//数学与交叉科学广东普通高校重点实验室(广州大学), 广东 广州 510006)

摘要: 利用锥上的不动点理论讨论一类含参广义 p -Laplace 边值问题正解的存在性与多解性, 给出了参数 λ 的显式开区间。已有文献在多解性研究中, 通常要求非线性项在正半轴恒正。本文改进这一基本假设条件, 允许非线性项在正半轴的某些子集上恒为零。

关键词: 广义 p -Laplace 边值问题; 参数; 正解; 锥

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2013)01-0040-06

The Existence and Multiplicity of Positive Solutions of Generalized p -Laplacian Boundary Value Problems

BAI Dingyong, ZUO Minxian

(School of Mathematics and Information Science//Key Laboratory of Mathematics and Interdisciplinary Science of Guangdong Higher Education Institutes, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: A generalized p -Laplacian boundary value problem with a parameter is concerned. By using the fixed-point theorem in cones, some results of existence and multiplicity of positive solutions for the problem are established with the parameter belonging to corresponding explicit intervals. In the existed literatures about multiplicity of positive solutions, the nonlinear terms are usually required to be positive for all positive real numbers. This condition is relaxed in the present paper, more precisely, the nonlinear terms can vanish on some subset.

Key words: the generalized p -Laplacian boundary value problems; parameter; positive solution; cone

考虑如下边值问题

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' + \lambda F(t, u) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases} \quad (1)$$

其中, λ 是个正参数。记 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 。我们假设:

(A₁) $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是单调递增的奇同胚映射, 且存在从 $(0, \infty)$ 到 $(0, \infty)$ 上的单调递增同胚映射 ψ_1 和 ψ_2 , 使得 $\psi_1(x)\varphi(y) \leq \varphi(xy) \leq \psi_2(x)\varphi(y)$, $x, y > 0$;

(A₂) $F: (0, 1) \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ 连续, 且存在函数 $f \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 及 $\alpha_1, \alpha_2 \in C((0, 1); \mathbf{R}_+)$, 使得 $\alpha_1(t)f(x) \leq F(t, x) \leq \alpha_2(t)f(x)$,

$$t \in (0, 1), x \in \mathbf{R}_+$$

其中, α_1, α_2 满足:

$$(A_3) \int_0^1 \alpha_1(t) dt > 0, \int_0^1 \alpha_2(t) dt < \infty$$

函数 $\varphi(u')$ 包含两种重要情形: $\varphi(u') = u'$ 和 $\varphi(u') = |u'|^{p-2}u'$, $p > 1$ 。当 $\varphi(u') = u'$ 时, 问题 (1) 是如下熟知的二阶常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} u'' + \lambda F(t, u) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases} \quad (2)$$

关于问题 (2) 正解的存在性和多解性研究已有大量文献, 参见文 [1-5]。若 $\varphi(u') = |u'|^{p-2}u'$

* 收稿日期: 2012-06-27

基金项目: 教育部博士点基金资助项目 (20104410120001)

作者简介: 白定勇 (1972 年生), 男, 教授; E-mail: baidy@gzhu.edu.cn

> 1 , 记为 $\varphi_p(u)$, 则问题 (1) 是一维 p -Laplace 边值问题:

$$\begin{cases} (\varphi_p(u'))' + \lambda F(t, u) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases} \quad (3)$$

近年来, 一维 p -Laplace 边值问题 (3) 的正解得到人们的广泛关注, 对其研究也日益深入。Agarwal 等^[6] 讨论了问题 (3) 特征值集合的结构及正解的存在性与多解性, 得到了丰富而有意义的结果。此外, 还可参见文 [7-14] 及其参考文献对一维 p -Laplace 含参边值问题的研究。但是, 对于广义 p -Laplace 边值问题的研究相对较少^[15-19]。Wang^[15] 利用锥上的不动点指数定理研究了广义 p -Laplace 问题 (1) 正解及多个正解的存在性, 给出了参数 λ 的显式开区间, 其中 $F(t, u) = a(t)f(u)$, $\mu \in C[0, 1; \mathbf{R}_+)$, $f \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$ 。文 [15] 对多个正解的研究中, 其基本假设条件是非线性项 f 在右正半轴 $u > 0$ 上恒正, 即 $f(u) > 0$ 对 $\forall u > 0$ 成立。在文 [16] 中, Bai 和 Xu 讨论了含时滞的多参数广义 p -Laplace 问题, 在多解性研究中同样要求非线性项在右正半轴上恒正。另外, O'Regan 等^[7] 对一维 p -Laplace 含参系统多个径向正解的研究中, 其基本条件亦是如此。本文受文 [6-7, 15-16] 的启发, 研究参数 λ 的特征区间, 讨论问题 (1) 正解的存在性与多解性。本文的主要结果不仅推广了一维 p -Laplace 的情形, 而且多解性结果改进了文 [7, 15-16] 要求非线性项在右正半轴恒正的基本假设条件, 允许非线性项在右正半轴的某些子集上恒为零。

1 准备工作

由条件 (A₃), 存在 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $0 <$

$\int_{\delta}^{1-\delta} \alpha_1(t) dt < \infty$ 。定义函数

$$q(t) = \frac{1}{2} \int_{\delta}^t \psi_2^{-1} \left(\int_{\delta}^s \alpha_1(t) dt \right) ds + \frac{1}{2} \int_t^{1-\delta} \psi_2^{-1} \left(\int_t^s \alpha_1(t) dt \right) ds, \quad t \in [\delta, 1-\delta]$$

易证, $q(t)$ 是 $[\delta, 1-\delta]$ 上的正值连续函数。我们记 $L = \min\{q(t) : t \in [\delta, 1-\delta]\}$ 。

引理 1^[15] 假设条件 (A₁) 成立, 则对所有的 $x, y > 0$, 有

$$\psi_2^{-1}(x)y \leq \varphi^{-1}(x\varphi(y)) \leq \psi_1^{-1}(x)y.$$

利用凹函数的性质容易证明下面的引理, 亦可参见文 [16]。

引理 2 设 $u \in C[a, b]$ ($a < b$) 是非负凹函数, 且 $u(a) = u(b) = 0$ 。则对任意 $\gamma: a < \gamma < \frac{a+b}{2}$, 有 $u(t) \geq \frac{\gamma-a}{b-a} \|u\|_{[a,b]}$, $t \in [\gamma, b+a-\gamma]$ 。这里, $\|u\|_{[a,b]}$ 表示空间 $C[a, b]$ 上的上确界范数。

记 $X = C[0, 1]$, 其上范数为 $\|u\| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$ 。定义 X 上的锥

$$K = \{y \in X : y \text{ 是 } [0, 1] \text{ 上的非负凹函数}\}$$

定义算子 $T_\lambda: K \rightarrow X$

$$T_\lambda u(t) = \begin{cases} \int_0^t \varphi^{-1} \left(\int_s^\sigma \lambda F(r, u(r)) dr \right) ds, & 0 \leq t \leq \sigma \\ \int_t^1 \varphi^{-1} \left(\int_\sigma^s \lambda F(r, u(r)) dr \right) ds, & \sigma \leq t \leq 1 \end{cases}$$

其中, $\sigma \in (0, 1)$ 是方程 $\Gamma u(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$ 的解。这里, 映射 $\Gamma: K \rightarrow C[0, 1]$ 定义为

$$\Gamma u(t) = \int_0^t \varphi^{-1} \left(\int_s^\sigma \lambda F(r, u(r)) dr \right) ds - \int_t^1 \varphi^{-1} \left(\int_\sigma^s \lambda F(r, u(r)) dr \right) ds$$

由文 [15] 的讨论知算子 T_λ 有定义。显然

$$(T_\lambda u)'(t) = \begin{cases} \varphi^{-1} \left(\int_t^\sigma \lambda F(s, u(s)) ds \right), & 0 \leq t \leq \sigma, \\ -\varphi^{-1} \left(\int_\sigma^t \lambda F(s, u(s)) ds \right), & \sigma \leq t \leq 1 \end{cases}$$

在 $(0, 1)$ 上连续非增, $(T_\lambda u)'(\sigma) = 0$, 且 $(\varphi((T_\lambda u)'(t)))' = -\lambda F(t, u(t))$, $t \in (0, 1)$ 。所以 $T_\lambda(K) \subset K$, 且 T_λ 在 K 中的正不动点就是问题 (1) 的正解。另外, 易证 $T_\lambda: K \rightarrow K$ 紧连续。

本文的主要工具是如下不动点定理^[20]。

引理 3^[20] 令 X 是 Banach 空间, $K \subset X$ 为 X 中的一个锥, Ω_1, Ω_2 是 X 中的开子集, 且 $0 \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ 。算子 $T: K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ 是一个连续紧算子。若下列情形之一满足:

- (i) $\|Tu\| \leq \|u\|$, $\mu \in K \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Tu\| \geq \|u\|$, $\mu \in K \cap \partial\Omega_2$;
- (ii) $\|Tu\| \geq \|u\|$, $\mu \in K \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Tu\| \leq \|u\|$, $\mu \in K \cap \partial\Omega_2$ 。

则 T 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中至少有一不动点。

2 正解的存在性与多解性

记

$$f_\rho = \lim_{u \rightarrow \rho} \frac{f(u)}{\varphi(u)}, \quad \rho = 0^+, \infty,$$

$$A = \int_0^1 \alpha_2(t) dt, \quad B_1 = \psi_2\left(\frac{1}{\delta L}\right), \quad B_2 = \psi_1\left(\frac{1}{\psi_1^{-1}(A)}\right)$$

下面叙述本文的主要结果及其证明。首先我们讨论问题 (1) 至少一个正解的存在性。

定理 1 设 (A₁), (A₂) 和 (A₃) 成立且 f_∞ > 0 f₀ < ∞, 则对 λ ∈ (B₁/f_∞, B₂/f₀), 问题 (1) 至少存在一个正解。

证明 选取充分小正数 ε, 使得 B₁/(f_∞ - ε) < λ < B₂/(f₀ + ε)。由 f₀ < ∞, 存在 r > 0, 使得 f(x) ≤ (f₀ + ε)φ(x) 0 < x ≤ r。令 Ω_r = {u ∈ X: ||u|| < r}。则对 u ∈ K ∩ ∂Ω_r, 有

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\leq \varphi^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \alpha_2(t) (f_0 + \varepsilon) \varphi(u(t)) dt\right) \leq \\ &\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt \lambda (f_0 + \varepsilon) \varphi(r)\right) \leq \\ &\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt \psi_1^{-1}(\lambda(f_0 + \varepsilon))\right) \varphi(r) \leq \\ &\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt \varphi(\psi_1^{-1}(\lambda(f_0 + \varepsilon)) \cdot r)\right) \leq \\ &\psi_1^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt\right) \cdot \psi_1^{-1}(\lambda(f_0 + \varepsilon)) \cdot r \leq r = \|u\| \end{aligned}$$

由 f_∞ > 0, 取 R₁ > 0, 使 f(x) ≥ (f_∞ - ε)φ(x) x ≥ R₁。令 R = max{2r, R₁/δ} 及 Ω_R = {u ∈ X: ||u|| < R}。则对 u ∈ K ∩ ∂Ω_R, 由引理 2, 有 R ≥ u(t) ≥ δ||u|| ≥ R_{1}, t ∈ [δ, 1 - δ]。从而, f(u(t)) ≥ (f_∞ - ε)φ(u(t)) t ∈ [δ, 1 - δ]。注意到 σ 是 T_λu(t) 的最大值点, 若 σ ∈ [δ, 1 - δ], 由条件 (A₁) 及引理 1, 有}

$$\|T_\lambda u\| \geq \frac{1}{2} \left[\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \lambda \alpha_1(\tau) f(u(\tau)) d\tau\right) ds + \int_\sigma^{1-\delta} \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \lambda \alpha_1(\tau) f(u(\tau)) d\tau\right) ds \right]$$

其中

$$\begin{aligned} &\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \lambda \alpha_1(\tau) f(u(\tau)) d\tau\right) ds \geq \\ &\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \lambda \alpha_1(\tau) (f_\infty - \varepsilon) \varphi(u(\tau)) d\tau\right) ds \geq \\ &\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau \psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon))\right) \cdot \varphi(\delta \|u\|) ds \geq \\ &\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau \varphi(\psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\|)\right) ds \geq \\ &\int_\delta^\sigma \psi_2^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau\right) ds \cdot \psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\| \end{aligned}$$

同样有

$$\int_\sigma^{1-\delta} \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \lambda \alpha_1(\tau) f(u(\tau)) d\tau\right) ds \geq$$

$$\int_\sigma^{1-\delta} \psi_2^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau\right) ds \cdot \psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\|$$

从而 ||T_λu|| ≥ L · ψ₂⁻¹(λ(f_∞ - ε)) · δ ||u|| ≥ ||u||。类似地, 若 σ > 1 - δ, 有

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\geq \frac{1}{2} \int_\delta^{1-\delta} \psi_2^{-1}\left(\int_s^{1-\delta} \alpha_1(\tau) d\tau\right) ds \cdot \\ &\psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\| \geq \\ &L \cdot \psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\| \geq \|u\| \end{aligned}$$

若 σ < δ, 有

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\geq \frac{1}{2} \int_\delta^{1-\delta} \psi_2^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau\right) ds \cdot \\ &\psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\| \geq \\ &L \cdot \psi_2^{-1}(\lambda(f_\infty - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\| \geq \|u\| \end{aligned}$$

所以, 对 u ∈ K ∩ ∂Ω_R, 有 ||T_λu|| ≥ ||u|| 由引理 3 (i), 问题 (1) 至少存在一个正解。

定理 2 设 (A₁), (A₂) 和 (A₃) 成立且 f_∞ < ∞ f₀ > 0, 则对 λ ∈ (B₁/f₀, B₂/f_∞) 问题 (1) 至少存在一个正解。

证明 选取充分小正数 ε, 使得 B₁/(f₀ - ε) < λ <

B₂/(f_∞ + ε)。由 f₀ > 0, 存在 r > 0, 使得 f(x) ≥ (f₀ - ε)φ(x) 0 < x ≤ r。令 Ω_r = {u ∈ X: ||u|| < r}。则对 u ∈ K ∩ ∂Ω_r, 由引理 2, r ≥ u(t) ≥ δ||u||, t ∈ [δ, 1 - δ]。与定理 1 中的讨论类似, 有

$$\|T_\lambda u\| \geq L \cdot \psi_2^{-1}(\lambda(f_0 - \varepsilon)) \cdot \delta \|u\| \geq \|u\|$$

定义 $\tilde{f}: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, $\tilde{f}(t) = \max\{f(u) : u \in \mathbf{R}_+, \mu \leq t\}$ 。则由文 [15] 中的讨论知, $\tilde{f}_\infty = f_\infty$, 其中 $\tilde{f}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(t)}{\varphi(t)}$ 。选取 R₂ > 0, 使 $\tilde{f}(x) \leq (\tilde{f}_\infty + \varepsilon)\varphi(x)$ x ≥ R₂。取 R > {2r, R_{2}}, 及 Ω_R = {u ∈ X: ||u|| < R}。则对 u ∈ K ∩ ∂Ω_R, 有 $\tilde{f}(R) \leq (\tilde{f}_\infty + \varepsilon)\varphi(R)$, 从而}

$$\begin{aligned} \|T_\lambda u\| &\leq \varphi^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \alpha_2(t) \tilde{f}(R) dt\right) \leq \\ &\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \lambda \alpha_2(t) \tilde{f}(R) dt\right) \leq \end{aligned}$$

$$\psi_1^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt\right) \psi_1^{-1}(\lambda(f_\infty + \varepsilon)) \cdot R \leq R = \|u\|$$

由引理 3 (ii), 问题 (1) 至少存在一个正解 u。

推论 1 设 (A₁), (A₂) 和 (A₃) 成立, 若条件 (i) f₀ = ∞ f_∞ = 0 和 (ii) f₀ = 0 f_∞ = ∞ 之一满足, 则对任意 λ > 0, 问题 (1) 都至少存在一个正解。

推论 2 设 (A₁), (A₂) 和 (A₃) 成立, 若条件

(i) $f_0 = k, f_\infty = \infty$ 和 (ii) $f_0 = \infty, f_\infty = k$ 之一满足, 则对任意 $\lambda \in (0, \frac{B_2}{k})$, 问题 (1) 都至少存在一个正解。

推论 3 设 $(A_1), (A_2)$ 和 (A_3) 成立, 若条件 (i) $f_0 = 0, f_\infty = k$; (ii) $f_0 = k, f_\infty = 0$ 之一满足, 则对任意 $\lambda \in (\frac{B_1}{k}, \infty)$, 问题 (1) 都至少存在一个正解。

下面讨论问题 (1) 多个正解的存在性。为此, 假设

$$(A_4) \sup_{r>0} \min_{\delta r \leq y \leq r} f(y) > 0.$$

为方便起见, 我们再引入下列记号:

$$M(r) = \max_{0 \leq y \leq r} f(y), m(r) = \min_{\delta r \leq y \leq r} f(y), r > 0,$$

$$\lambda^* = \sup_{r>0} \frac{\varphi\left(\frac{r}{\psi_1^{-1}(A)}\right)}{M(r)}, \lambda^{**} = \inf_{r>0} \frac{\varphi\left(\frac{r}{L}\right)}{m(r)}$$

易证, 在条件 (A_2) 和 (A_4) 下, $0 < \lambda^* \leq \infty, \lambda^{**} < \infty$ 。

另外, 我们还需要如下两个引理。

引理 4 假设 $(A_1), (A_2)$ 和 (A_3) 成立。如果存在常数 $R > r > 0$, 使得

$$M(r) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi\left(\frac{r}{\psi_1^{-1}(A)}\right), m(R) \geq \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi\left(\frac{R}{L}\right)$$

则问题 (1) 存在正解 $u \in K$, 且满足 $r \leq \|u\| \leq R$ 。

证明 记 $\Omega_r = \{u \in X: \|u\| < r\}$ 。对 $u \in K \cap \partial\Omega_r$, 有 $f(u(t)) \leq \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{r}{\psi_1^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt\right)}\right), \forall t \in [0, 1]$ 。从而, 利用引理 1, 有

$$\|T_\lambda u\| \leq \varphi^{-1}\left[\int_0^1 \alpha_2(t) dt \varphi\left(\frac{r}{\psi_1^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt\right)}\right)\right] \leq \psi_1^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt\right) \frac{r}{\psi_1^{-1}\left(\int_0^1 \alpha_2(t) dt\right)} = r = \|u\|$$

另一方面, 令 $\Omega_R = \{u \in X: \|u\| < R\}$ 。则对 $u \in K \cap \partial\Omega_R$, 利用引理 2, 有 $R \geq u(t) \geq \delta \|u\| = \delta R, t \in [\delta, 1 - \delta]$ 。由于 $T_\lambda u(\sigma)$ 是 $T_\lambda u(t)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值, 利用引理 1, 若 $\sigma \in [\delta, 1 - \delta]$, 则

$$\|T_\lambda u\| \geq \frac{1}{2} \left[\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \lambda \alpha_1(\tau) f(u(\tau)) d\tau\right) ds + \int_\sigma^{1-\delta} \varphi^{-1}\left(\int_\sigma^s \lambda \alpha_1(\tau) f(u(\tau)) d\tau\right) ds \right] \geq$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_\delta^\sigma \varphi^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau \varphi\left(\frac{R}{L}\right)\right) ds + \int_\sigma^{1-\delta} \varphi^{-1}\left(\int_\sigma^s \alpha_1(\tau) d\tau \varphi\left(\frac{R}{L}\right)\right) ds \right] \geq \frac{1}{2} \left[\int_\delta^\sigma \psi_2^{-1}\left(\int_s^\sigma \alpha_1(\tau) d\tau\right) ds + \int_\sigma^{1-\delta} \psi_2^{-1}\left(\int_\sigma^s \alpha_1(\tau) d\tau\right) ds \right] \frac{R}{L} \geq L \cdot \frac{R}{L} = R = \|u\|$$

若 $\sigma > 1 - \delta$, 有 $\|T_\lambda u\| \geq \frac{1}{2} \int_\delta^{1-\delta} \varphi^{-1}\left(\int_s^{1-\delta} \alpha_1(\tau) d\tau \varphi\left(\frac{R}{L}\right)\right) ds \geq q(1 - \delta) \cdot \frac{R}{L} \geq R = \|u\|$ 。若 $\sigma < \delta$, 同样有 $\|T_\lambda u\| \geq q(\delta) \cdot \frac{R}{L} \geq R = \|u\|$ 。所以, 由引理 3 (i), 问题 (1) 存在正解 u 满足 $r \leq \|u\| \leq R$ 。

引理 5 假设 $(A_1), (A_2)$ 和 (A_3) 成立。如果存在常数 r 和 R , 满足 $0 < r < \frac{LR}{\psi_1^{-1}(A)} < R$, 使得

$$M(R) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi\left(\frac{R}{\psi_1^{-1}(A)}\right), m(r) \geq \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi\left(\frac{r}{L}\right)$$

则问题 (1) 存在正解 $u \in K$, 且满足 $r \leq \|u\| \leq R$ 。

证明 首先, 易证我们的假设条件是相容的。另外, 类似于引理 4 的证明, 利用引理 3 (ii), 问题 (1) 至少存在一个正解 u , 且满足 $r \leq \|u\| \leq R$ 。

定理 3 设 $(A_1), (A_2), (A_3)$ 和 (A_4) 成立, 且 $f_0 = \infty, f_\infty = \infty$ 。则对 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 问题 (1) 至少存在两个正解。

证明 定义函数 $h(r) = \frac{\varphi\left(\frac{r}{\psi_1^{-1}(A)}\right)}{M(r)}$ 。则由 $(A_1), (A_2)$ 及 $f_0 = \infty, f_\infty = \infty$ 知, $h: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 连续, 且 $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = 0$ 。则存在 $r_0 \in (0, \infty)$, 使 $h(r_0) = \sup_{r>0} h(r) = \lambda^*$ 。对任意 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 存在常数 $c_1, c_2 (0 < c_1 < r_0 < c_2 < \infty)$, 使 $h(c_1) = h(c_2) = \lambda$ 。从而

$$M(c_1) = \frac{1}{h(c_1)} \cdot \varphi\left(\frac{c_1}{\psi_1^{-1}(A)}\right) = \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{c_1}{\psi_1^{-1}(A)}\right), M(c_2) = \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi\left(\frac{c_2}{\psi_1^{-1}(A)}\right)$$

另一方面, 由 $f_0 = \infty, f_\infty = \infty$ 知, 存在常数 $d_1, d_2: 0 < d_1 < \frac{Lc_1}{\psi_1^{-1}(A)} < c_1 < c_2 < d_2 < \infty$, 使得 $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$

$\geq \frac{1}{\lambda} \psi_2\left(\frac{1}{\delta L}\right)$, $u \in (0, d_1] \cup [\delta d_2, \infty)$ 。因此

$$m(d_1) = \min_{\delta d_1 \leq u \leq d_1} f(u) \geq \frac{1}{\lambda} \min_{\delta d_1 \leq u \leq d_1} \varphi(u) \psi_2\left(\frac{1}{\delta L}\right) \geq \frac{1}{\lambda} \min_{\delta d_1 \leq u \leq d_1} \varphi\left(\frac{u}{\delta L}\right) \geq \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{d_1}{L}\right)$$

同样地, $m(d_2) = \min_{\delta d_2 \leq u \leq d_2} f(u) \geq \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{d_2}{L}\right)$ 。所以, 由引理 4 和引理 5, 问题 (1) 至少存在两个正解 u_1 和 u_2 , 满足 $d_1 \leq \|u_1\| \leq c_1$, $d_2 \leq \|u_2\| \leq d_2$ 。

定理 4 设 (A_1) , (A_2) , (A_3) 和 (A_4) 成立, 且 $f_0 = 0$, $f_\infty = 0$ 。则对 $\lambda \in (\lambda^{**}, \infty)$, 问题 (1) 至少存在两个正解。

证明 令 $J(r) = \frac{\varphi\left(\frac{r}{L}\right)}{m(r)}$ 。由 (A_1) , (A_2) 及 $f_0 = 0$, $f_\infty = 0$ 知, $J: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 连续, 且 $\lim_{r \rightarrow 0} J(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} J(r) = \infty$ 。则存在 $r_0 \in (0, \infty)$, 使 $J(r_0) = \inf_{r > 0} J(r) = \lambda^{**}$ 。对任意 $\lambda \in (\lambda^{**}, \infty)$, 存在常数 d_1, d_2 ($0 < d_1 < r_0 < d_2 < \infty$), 使 $J(d_1) = J(d_2) = \lambda$ 。这样,

$$m(d_1) = \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{d_1}{L}\right), m(d_2) = \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{d_2}{L}\right)$$

另一方面, 由 $f_0 = 0$, 存在常数 c_1 ($0 < c_1 < d_1$), 使 $\frac{f(u)}{\varphi(u)} \leq \frac{1}{\lambda} \psi_1\left(\frac{1}{\psi_1^{-1}(A)}\right)$, $u \in (0, c_1]$ 。从而

$$M(c_1) = \max_{0 \leq u \leq c_1} f(u) \leq \frac{1}{\lambda} \varphi(c_1)$$

$$\psi_1\left(\frac{1}{\psi_1^{-1}(A)}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{c_1}{\psi_1^{-1}(A)}\right)$$

由 $f_\infty = 0$, 存在常数 $\tilde{c}_2: \left(\frac{\tilde{L}c_2}{\psi_1^{-1}(A)}\right) > d_2$, 使得

$$\frac{f(u)}{\varphi(u)} \leq \frac{1}{\lambda} \psi_1\left(\frac{1}{\psi_1^{-1}(A)}\right), \forall u > \tilde{c}_2$$
。取

$$c_2 > \max\{\varphi^{-1}(\lambda M(\tilde{c}_2)), \psi_1^{-1}(A), \tilde{c}_2\}$$

则对 $u \in [0, c_2]$, 有 $f(u) \leq \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{c_2}{\psi_1^{-1}(A)}\right)$ 。所以, 由引理 4 和引理 5, 问题 (1) 至少存在两个正解 u_1 和 u_2 , 满足 $c_1 \leq \|u_1\| \leq d_1$, $d_2 \leq \|u_2\| \leq c_2$ 。

推论 4 设 (A_1) - (A_3) 及 (A_4) 成立, 且 $f_0 = \infty$ 或 $f_\infty = \infty$ 。则对 $\lambda \in (0, \lambda^*)$, 问题 (1) 至少存在一个正解。

推论 5 设 (A_1) - (A_3) 及 (A_4) 成立, 且 $f_0 = 0$ 或 $f_\infty = 0$ 。则对 $\lambda \in (\lambda^{**}, \infty)$, 问题 (1) 至少存在一个正解。

3 例子

设 $a > 0, b > 0$ 。我们考察下面的函数

$$f(u) = \begin{cases} \varphi(u) + b, & u \in [0, a], \\ \varphi(a) + b, & u \in [a, 8a], \\ \frac{\varphi(a) + b}{2a}(10a - u), & u \in [8a, 10a], \\ 0, & u \in [10a, 100a], \\ u(\varphi(u - 100a)), & u > 100a \end{cases}$$

容易验证 $f_0 = \infty, f_\infty = \infty$ 。由定理 3, 存在 $\lambda^* > 0$, 当 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 时, 问题 (1) 至少存在两个正解。文 [7, 15-16] 要求非线性项 $f(u) > 0$ 对所有的 $u > 0$ 成立。而我们给出的条件 (A_4) 允许非线性项在某段区间上恒为零, 如上面所给函数 $f(u)$ 在区间 $[10a, 100a]$ 上恒为零。所以本文的多解性条件推广了文 [7, 15-16] 中的基本条件, 从而使适用的函数更为广泛。

参考文献:

- [1] HA K S, LEE Y. Existence of multiple positive solutions of singular boundary value problem [J]. Nonl Anal, 1997, 28(8): 1429-1438.
- [2] FINK A M, GATICA J A, HERNANDEZ G E. Eigenvalues of generalized Gelfand models [J]. Nonl Anal, 1993, 20(12): 1453-1468.
- [3] WANG H. On the existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in annulus [J]. J Differ Equ, 1994, 109: 1-7.
- [4] ERBE L H, WANG H. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 743-748.
- [5] HENDERSON J, WANG H. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems [J]. J Math Anal Appl, 1997, 208: 252-259.
- [6] AGARWAL R, LU H, O'REGAN D. Eigenvalues and the one-dimensional p -Laplacian [J]. J Math Anal Appl, 2002, 266: 383-400.
- [7] O'REGAN D, WANG H. On the number of positive solutions of elliptic systems [J]. Math Nachr, 2007, 280(12): 1417-1430.
- [8] MANASEVICH R, MAWHIN J. The spectrum of p -Laplacian systems with various boundary conditions and applications [J]. Adv Differ Equ 2000 5: 1289-1318.
- [9] FILIPPAKIS M E, PAPAGEORGIOU N S. Existence of multiple positive solutions for nonlinear eigenvalue problems with the p -Laplacian and nonsmooth potential [J]. J Nonl Funct Anal Differ Equ, 2007, 1: 17-32.

(下转第 50 页)

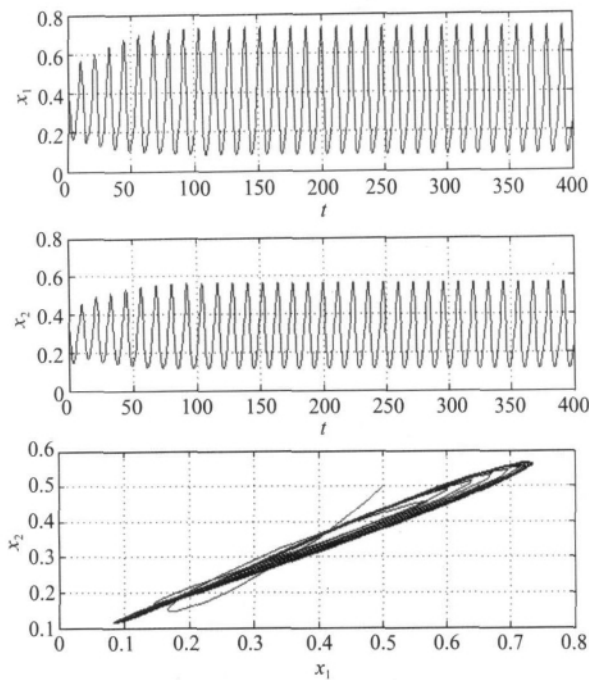


图 2 $\tau = 2.1$ Hopf 分岔及周期解稳定

Fig. 2 Hopf bifurcation and stability for $\tau = 2.1$

参考文献:

- [1] LI Y Q, GAO H L. Existence, uniqueness and global asymptotic stability of positive solutions of a predator-prey system with Holling II functional response with random perturbation [J]. *Nonlinear Analysis*, 2008, 68: 1694 – 1705.
- [2] RUAN S, WEI J. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays [J]. *Dyn Contin Discrete Impuls Syst Ser A Math Anal*, 2003, 10: 863 – 874.
- [3] YAN X P, LI W T. Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system [J]. *Appl Math Comput*, 2006, 177: 427 – 445.
- [4] FARIA T. Stability and bifurcation for a delayed predator-prey model and the effect of diffusion [J]. *J Math Appl*, 2001, 254: 433 – 463.
- [5] SONG Y L, WEI J J. Local Hopf bifurcation and global periodic solutions in a delayed predator-prey system [J]. *J Math Appl*, 2005, 301: 1 – 21.
- [6] HASSARD B, KAZARINOFF D, WAN Y. *Theory and applications of Hopf bifurcation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [7] QIN Y, WANG L, LIU Y, et al. *Stability of the dynamics systems* [M]. Beijing: Science Press, 1989.
- [8] HALE J, LUNEL S M. *Introduction to functional differential equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [9] STECH A. Hopf bifurcation calculations for functional differential equations [J]. *J Math Anal Appl*, 1985, 109: 472 – 491.
- [10] HAI D D. Positive solutions for a class of singular semipositone p -Laplacian problems [J]. *Differ Integ Equ*, 2007, 20: 51 – 62.
- [11] ALI J, SHIVAJI R. Positive solutions for a class of p -Laplacian systems with multiple parameters [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 335: 1013 – 1019.
- [12] KAJIKIYA R, LEE Y, SIM INBO. Bifurcation of sign-changing solutions for one-dimensional p -Laplacian with a strong singular weigh p -sublinear at ∞ [J]. *Nonl Anal* 2009, 71: 1235 – 1249.
- [13] KIM C. The three-solutions theorem for p -Laplacian boundary value problems [J]. *Nonl Anal*, 2012, 75: 924 – 931.
- [14] KIM C, WARDB J R. Nonresonance for a one-dimensional p -Laplacian with strong singularity [J]. *Appl Math Lett*, 2011, 24: 1400 – 1404.
- [15] WANG H. On the number of positive solutions of nonlinear systems [J]. *J Math Anal Appl*, 2003, 281: 287 – 306.
- [16] BAI D, XU Y. Positive solutions and eigenvalue regions of two-delay singular systems with a twin parameter [J]. *Nonl Anal*, 2007, 66: 2547 – 2564.
- [17] LEE E, LEE Y. A multiplicity result for generalized Laplacian systems with multiparameters [J]. *Nonl Anal*, 2009, 71: 366 – 376.
- [18] HERDERSON J, WANG H. Nonlinear eigenvalue problems for quasilinear systems [J]. *Comput Math Appl*, 2005, 49: 1941 – 1949.
- [19] HERDERSON J, WANG H. An eigenvalue problem for quasilinear systems [J]. *Rocky Mountain J Math*, 2007, 37: 215 – 228.
- [20] Guo D, LAKSHMIKANTHAM V. *Nonlinear problems in abstract cones* [M]. Orlando: Academic Press, 1988.

(上接第 44 页)